

УДК 511.2

ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ІНВАРІАНТАМИ  $T$  І  $R$ 

В. М. Євладенко, Ю.П. Пігарьов

Доведено узагальнення теореми 3 [1] про залежність між інваріантами  $R$  і  $T$ , яка дає можливість будувати множини, для яких  $R > C \cdot T$ , де  $C$  – як завгодно велике дійсне число. Обчислено значення  $R$  і  $T$  для множин, що налічують 6, 7, 8 елементів. Приводиться геометрична інтерпретація одержаних результатів.

Generalization of theorem 3 [1] on the dependence between invariants  $R$  and  $T$  has been proved that enables to build up sets for which  $R > C \cdot T$ , where  $C$  is any big real number. The meanings of  $R$  and  $T$  have been found for the sets, which consist of 6, 7, 8 elements. Geometric interpretation of the obtained data is given.

В роботі [1] доведена теорема 3, яка дає можливість будувати множини, для яких  $R = T + n$ , де  $n$  – довільне наперед задане натуральне число. Ця теорема, як доводиться нижче, допускає узагальнення.

З метою подальшого викладу розглянемо такі множини:

$$L_1 = \{0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}, a_i \in \mathbb{N} (i=1, 2, \dots, k-1),$$

$$L_2 = \{2 \cdot a_{k-1} + 1, 2 \cdot a_{k-1} + 1 + a_1, \dots, 2 \cdot a_{k-1} + 1 + a_{k-1}\},$$

$$L_3 = \{6 \cdot a_{k-1} + 3, 6 \cdot a_{k-1} + 3 + a_1, \dots, 6 \cdot a_{k-1} + 3 + a_{k-1}\},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$L_i = \{(2^i - 2) \cdot a_{k-1} + 2^{i-1} - 1, (2^i - 2) \cdot a_{k-1} + 2^{i-1} - 1 + a_1, \dots, (2^i - 2) \cdot a_{k-1} + 2^{i-1} - 1 + a_{k-1}\}$$

$$(i=1, 2 \dots n+1),$$

$$\bigcup_{i=1}^n L_i = K_n. \quad T(L_i) = T_i. \quad \text{Елементи } L_i \text{ утворюють } R_i \text{ різних додатних}$$

різниць. Введемо позначення:

$$(2^{n+1} - 2) \cdot a_{k-1} + 2^n - 1 = A$$

$$(2^i - 2) \cdot a_{k-1} + 2^{i-1} - 1 = B_i (i=1, 2, \dots, n).$$

**Теорема 4.** Для побудованих множин  $K_n$  при будь-яких натуральних  $k$  і  $n$  мають місце рівності:

$$R_n = R_1 + \overline{R_1} \cdot \frac{n^2 - n}{2}, \quad (1)$$

$$T_n = T_1 \cdot \frac{n^2 + n}{2}. \quad (2)$$

*Доведення.* Доведення проведемо методом математичної індукції по  $n$  при довільному фіксованому  $k$ .

При  $n=1$ , як легко перевірити, формули (1) і (2) мають місце.

1. Припустимо, що формула (1) справедлива при натуральному  $n$  і покажемо, що вона має місце і при  $n+1$ .

Розглянемо різні різниці, одержані за допомогою елементів множин  $L_{n+1}$  і  $L_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), де

$$L_{n+1} = \{ A, A+a_1, A+a_2, \dots, A+a_{k-1} \}$$

$$L_i = \{ B_i, B_i+a_1, B_i+a_2, \dots, B_i+a_{k-1} \}:$$

$$\begin{aligned} & A-B_i, A-B_i+a_1, A-B_i+a_2, \dots, A-B_i+a_{k-1}, \\ & A-B_i-a_1, A-B_i, A-B_i+a_2-a_1, \dots, A-B_i+a_{k-1}-a_1, \\ & A-B_i-a_2, A-B_i+a_1-a_2, A-B_i, \dots, A-B_i+a_{k-1}-a_2, \\ & \dots\dots\dots \\ & A-B_i-a_{k-1}, A-B_i+a_1-a_{k-1}, A-B_i+a_2-a_{k-1}, \dots, A-B_i. \end{aligned}$$

Елементи цих множин, які є різними різницями, очевидно утворюють квадратну матрицю, над діагоналлю якої, як легко перевірити, буде  $R_1$  різних різниць. Стільки ж різних різниць буде і під діагоналлю, а тому елементи множини  $L_{n+1}$  утворюють з елементами множини  $L_i$   $\overline{R_1}$  різних різниць, де  $\overline{R_1} = 2 \cdot R_1 + 1$ . Всього ж нових різниць одержимо  $n \cdot \overline{R_1}$ . Значить

$$R_{n+1} = R_n + n \cdot \overline{R_1} = R_1 + \overline{R_1} \cdot \frac{n^2 - n}{2} + n \cdot \overline{R_1} = R_1 + \overline{R_1} \cdot \frac{n^2 + n}{2} = R_1 + \overline{R_1} \cdot \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2}.$$

Отже, формула (1) справджується і при  $n+1$ , що і потрібно було довести.

II. Для доведення формули (2) залишилось показати, що із припущення, що ця формула справедлива при довільному натуральному  $n$ , слідує, що вона має місце і при  $n+1$ .

З цією метою розглянемо нові суми, які одержуються за допомогою елементів множин  $L_{n+1}$  і  $L_i$  ( $i=1, 2, \dots, n+1$ ):

$$\begin{aligned} & A+B_i, A+a_1+B_i, A+a_2+B_i, \dots, A+a_{k-1}+B_i, \\ & A+B_i+a_1, A+B_i+2 \cdot a_1, A+B_i+a_2+a_1, \dots, A+B_i+a_{k-1}+a_1, \\ & A+B_i+a_2, A+B_i+a_1+a_2, A+B_i+2 \cdot a_2, \dots, A+B_i+a_{k-1}+a_2, \\ & \dots\dots\dots \\ & A+B_i+a_{k-1}, A+B_i+a_1+a_{k-1}, A+B_i+a_2+a_{k-1}, \dots, A+B_i+2 \cdot a_{k-1}. \end{aligned}$$

Ці суми більші сум, одержаних за допомогою елементів множини  $K_n$ , і їх буде  $T_1$ . Всього ж нових різних сум буде  $(n+1) \cdot T_1$ . Таким чином

$$T_{n+1} = T_n + (n+1) \cdot T_1 = T_1 \cdot \frac{n^2 + n}{2} + T_1 \cdot (n+1) = T_1 \cdot \frac{n^2 + n + 2 \cdot n + 2}{2} = T_1 \cdot \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2},$$

що і доводить формулу (2).

**Наслідок 1.** Якщо  $K_1$  – множина степенів з основою  $a > 1$  ( $a \in \mathbb{N}$ ) і різними натуральними показниками, і  $T(K_1) = k_1$ , то легко довести, що кількість різних сум елементів цієї множини буде  $T(2K_1) = \frac{k_1^2 + k_1}{2}$ .

Дійсно, припустивши, що  $a^s + a^t = a^p + a^q$ , приходимо до протиріччя, яке полягає в тому, що якщо ліву і праву частину цієї рівності поділимо на мінімальну степінь, наприклад  $a^q$ , то одержимо  $a^{s-q} + a^{t-q} = a^{p-q} + 1$ . Звідси випливає, що число 1 повинне ділитися на  $a$ , що неможливо.

Аналогічно доводиться, що число різних додатних різниць обчислюється за формулою  $R_1 = \frac{k_1^2 - k_1}{2}$  і  $\overline{R}_1 = k_1^2 - k_1 + 1$ .

Застосувавши теорему 4, одержимо множину з такими значеннями  $T_2$  і  $\overline{R}_2$ :  $T_2 = T_1 \cdot \frac{k_2^2 + k_2}{2}$ ,  $\overline{R}_2 = \overline{R}_1 \cdot (k_2^2 - k_2 + 1)$ .

Застосувавши цю теорему  $(m-1)$  раз, приходимо до множини, для якої  $T_m = \prod_{i=1}^m \frac{k_i^2 + k_i}{2}$ ,  $\overline{R}_m = \prod_{i=1}^m (k_i^2 - k_i + 1)$ .

Отже, при досить великих  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), будемо одержувати множини з як завгодно великими значеннями  $T_m$  і  $\overline{R}_m$ .

**Наслідок 2.** Теорема 4 дозволяє будувати такі множини, для яких  $R < T < R + T(K)$ , і множини, для яких  $T < R$ .

Деякі з таких множин вказані у наведеній нижче таблиці.

№ з/п	k	n	( $R_1, T_1$ )	$T_n$	$R_n$	$T(K_n) = n \cdot k$
1.	3	7	(3, 6)	168	150	21
2.	4	5	(6, 10)	150	136	20
3.	6	4	(15, 21)	210	201	24
4.	4	6	(5, 9)	189	170	24
5.	5	5	(7, 12)	180	157	25
6.	6	5	(14, 20)	300	304	30
7.	5	6	(10, 15)	315	325	30
8.	8	4	(27, 35)	350	357	32
9.	7	7	(21, 28)	784	924	49
10.	8	4	(28, 36)	360	370	32

**Значення R і T для множин, що налічують 6-ть елементів**

Шестиелементні множини беруться з таблиць 1, 11 роботи [3].

Інформація про класифікацію цих множин за значеннями R і T приведена нижче, де, наприклад, запис (12, 18), (19), № 49 означає: (12, 18) –

відповідні значення  $R$  і  $T$ , (19) – кількість множин з такими значеннями  $R$  і  $T$ , а № 49 – найменший номер такої множини.

1. (15, 21), (1), № 17.	14.8, 17), (2), № 29.
2. (14, 20), (1), № 214.	15.(10, 16), (16), № 142.
3. (13, 20), (1), № 36.	16.(9, 16), (30), № 9.
4. (13, 19), (4), № 57.	17.(8, 16), (9), № 10.
5. (12, 19), (9), № 28.	18.(9, 15), (8), № 68.
6. (11, 19), (3), № 24.	19.(8, 15), (12), №8.
7. (9,19), (1), № 45.	20.(7, 15), (5), № 18.
8. (12, 18), (19), № 49.	21.(8, 14), (4), № 126.
9. (11, 18), (39), № 3.	22.(7, 14), (5), № 91.
10. (10, 18), (18), № 16.	23.(7, 13), (2), № 12.
11.(11, 17), (30), № 36.	24.(6, 13), (3), № 64.
12.(10, 17), (41), №1.	25.(6, 12), (1), № 120.
13.(9, 17), (16), № 6.	26.(5, 11), (1), № 119.

Примітка. В роботі [3] є описка: множини № 215 і № 220 однакові.

### Значення $R$ і $T$ для множин, що налічують 7 елементів

1. (21, 28), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 30}	28. (12, 23), {0, 1, 2, 4, 9, 12, 13}
2. (20, 27), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 28}	29. (12, 22), {0, 1, 2, 6, 8, 11, 12}
3. (19, 27), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 25}	30. (12, 21), {0, 1, 2, 3, 8, 11, 12}
4. (19, 26), {0, 4, 5, 8, 14, 16, 29}	31. (12, 20), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 12}
5. (18, 26), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 24}	32. (12, 19), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 13}
6. (18, 25), {0, 3, 6, 10, 12, 20, 31}	33. (11, 22), {0, 1, 2, 4, 9, 11, 12}
7. (17, 26), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 23}	34. (11, 21), {0, 1, 2, 4, 8, 11, 12}
8. (17, 25), {0, 4, 5, 8, 14, 16, 21}	35. (11, 20), {0, 1, 2, 4, 6, 10, 11}
9. (17, 24), {0, 1, 9, 11, 15, 18, 21}	36. (11, 19), {0, 1, 2, 3, 5, 10, 11}
10. (16, 25), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 22}	37. (11, 18), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 11}
11. (16, 24) {0, 1, 5,8, 10, 16, 18}	38. (10, 21), {0, 1, 2, 4, 8, 10, 11}
12. (16, 23), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 18}	39. (10, 20), {0, 1, 2, 4, 6, 9, 10}
13. (15, 26), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 21}	40. (10, 19), {0, 1, 2, 6, 7, 11, 12}
14. (15, 25), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 16}	41. (10, 18), {0, 1, 2, 3, 4, 9, 10}
15. (15, 24), {0, 1, 3, 9, 12, 13, 17}	42. (10, 17), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 10}
16. (15, 23), {0, 1, 4, 7, 14, 15, 16}	43. (9, 19), {0, 1, 2, 5, 6, 8, 9}
17. (15, 22), {0, 2, 3, 4, 5, 10, 19}	44. (9, 18), {0, 1, 2, 3, 6, 8, 9}
18. (14, 25), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 20}	45. (9, 17), {0, 1, 2, 3, 4, 8, 9}
19. (14, 24), {0, 1, 4, 7, 8, 17, 18}	46. (9, 16), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9}
20. (14, 23), {0, 1, 8, 9, 10, 13, 15}	47. (8, 17), {0, 1, 2, 5, 6, 7, 8}

21. (14, 22), {0, 1, 2, 4, 7, 13, 15}	48. (8, 16), {0, 1, 2, 3, 4, 7, 8}
22. (14, 21), {0, 1, 2, 3, 5, 8, 17}	49. (8, 15), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8}
23. (13, 24), {0, 1, 2, 5, 11, 13, 16}	50. (7, 15), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7}
24. (13, 23), {0, 1, 2, 7, 9, 12, 13}	51. (7, 14), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}
25. (13, 22), {0, 1, 7, 8, 10, 13, 15}	52. (6, 13), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
26. (13, 21), {0, 1, 2, 6, 7, 10, 13}	
27. (13, 20), {0, 1, 2, 3, 5, 9, 13}	

Значення  $R$  і  $T$  для множин, що налічують 8 елементів

1. (28, 36), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 30, 61}	48. (16, 27), {0, 1, 2, 3, 7, 11, 15, 16}
2. (27, 35), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 28, 57}	49. (16, 26), {0, 1, 4, 7, 14, 15, 16, 17}
3. (26, 35), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 25, 51}	50. (16, 25), {0, 1, 2, 3, 4, 9, 14, 16}
4. (26, 34), {0, 4, 5, 8, 14, 16, 29, 59}	51. (16, 24), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 19}
5. (25, 34), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 24, 49}	52. (15, 29), {0, 1, 2, 5, 8, 11, 15, 16}
6. (25, 33), {0, 3, 6, 10, 12, 20, 31, 63}	53. (15, 28), {0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 17}
7. (24, 34), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 23, 47}	54. (15, 27), {0, 1, 2, 4, 7, 13, 15, 16}
8. (24, 33), {0, 4, 5, 8, 14, 16, 21, 43}	55. (15, 26), {0, 1, 8, 9, 10, 13, 15, 16}
9. (24, 32), {0, 1, 9, 11, 15, 18, 21, 43}	56. (15, 25), {0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 17}
10. (23, 33), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 22, 45}	57. (15, 24), {0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 17}
11. (23, 32), {0, 3, 6, 10, 12, 20, 31, 32}	58. (15, 23), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 17}
12. (23, 31), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 18, 37}	59. (14, 27), {0, 1, 2, 5, 8, 12, 13, 14}
13. (22, 34), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 21, 43}	60. (14, 26), {0, 1, 2, 7, 9, 12, 13, 14}
14. (22, 33), {0, 1, 3, 7, 12, 20, 25, 26}	61. (14, 25), {0, 1, 2, 3, 5, 9, 13, 14}
15. (22, 32), {0, 1, 3, 9, 12, 13, 17, 35}	62. (14, 24), {0, 1, 2, 3, 4, 9, 11, 14}
16. (22, 31), {0, 1, 4, 7, 14, 15, 16, 33}	63. (14, 23), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 13, 14}
17. (22, 30), {0, 2, 3, 4, 5, 10, 19, 39}	64. (14, 22), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 11, 14}
18. (21, 33), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 20, 41}	65. (13, 26), {0, 1, 2, 4, 9, 12, 13, 14}
19. (21, 32), {0, 1, 4, 7, 8, 17, 18, 37}	66. (13, 25), {0, 1, 2, 4, 8, 11, 12, 13}
20. (21, 31), {0, 1, 8, 9, 10, 13, 15, 31}	67. (13, 24), {0, 1, 2, 3, 8, 11, 12, 13}
21. (21, 30), {0, 1, 2, 4, 7, 13, 15, 31}	68. (13, 23), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 12, 13}
22. (21, 29), {0, 1, 2, 3, 5, 8, 17, 35}	69. (13, 22), {0, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 13}
23. (20, 32), {0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 33}	70. (13, 21), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 13}
24. (20, 31), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 22, 23}	71. (12, 25), {0, 1, 2, 4, 9, 11, 12, 13}
25. (20, 30), {0, 1, 7, 8, 10, 13, 15, 31}	72. (12, 24), {0, 1, 2, 4, 6, 8, 11, 12}
26. (20, 29), {0, 1, 2, 6, 7, 10, 13, 27}	73. (12, 23), {0, 1, 2, 4, 6, 10, 11, 12}
27. (20, 28), {0, 1, 2, 3, 5, 9, 13, 27}	74. (12, 22), {0, 1, 2, 3, 5, 10, 11, 12}
28. (19, 32), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 21, 22}	75. (12, 21), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 12}
29. (19, 31), {0, 1, 2, 4, 9, 12, 13, 27}	76. (12, 20), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 12}
30. (19, 30), {0, 1, 9, 11, 15, 18, 21, 22}	77. (12, 26), {0, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 14}
31. (19, 29), {0, 1, 2, 3, 8, 11, 12, 25}	78. (11, 23), {0, 1, 2, 4, 8, 10, 11, 12}
32. (19, 28), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 12, 25}	79. (11, 22), {0, 1, 2, 3, 6, 8, 9, 11}
33. (19, 27), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 13, 27}	80. (11, 21), {0, 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11}
34. (18, 31), {0, 1, 4, 6, 9, 10, 20, 21}	81. (11, 20), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11}
35. (18, 30), {0, 1, 2, 4, 9, 11, 12, 25}	82. (11, 19), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 11}
36. (18, 29), {0, 1, 5, 8, 10, 16, 18, 19}	83. (10, 21), {0, 1, 2, 5, 6, 8, 9, 10}
37. (18, 28), {0, 1, 2, 4, 6, 10, 11, 23}	84. (10, 20), {0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10}

38. (18, 27), {0, 1, 2, 3, 5, 11, 18, 19}	85. (10, 19), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10}
39. (18, 26), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 23}	86. (10, 18), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10}
40. (17, 30), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 16, 17}	87. (9, 19), {0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9}
41. (17, 29), {0, 1, 3, 9, 12, 13, 17, 18}	88. (9, 18), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9}
42. (17, 28), {0, 1, 2, 4, 6, 9, 10, 21}	89. (9, 17), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}
43. (17, 27), {0, 1, 2, 6, 7, 11, 12, 25}	90. (8, 17), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}
44. (17, 26), {0, 2, 3, 4, 5, 10, 19, 20}	91. (8, 16), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}
45. (17, 25), {0, 1, 2, 3, 4, 6, 10, 21}	92. (7, 15), {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
46. (16, 29), {0, 1, 3, 4, 9, 11, 15, 16}	
47. (16, 28), {0, 1, 2, 5, 8, 11, 14, 16}	

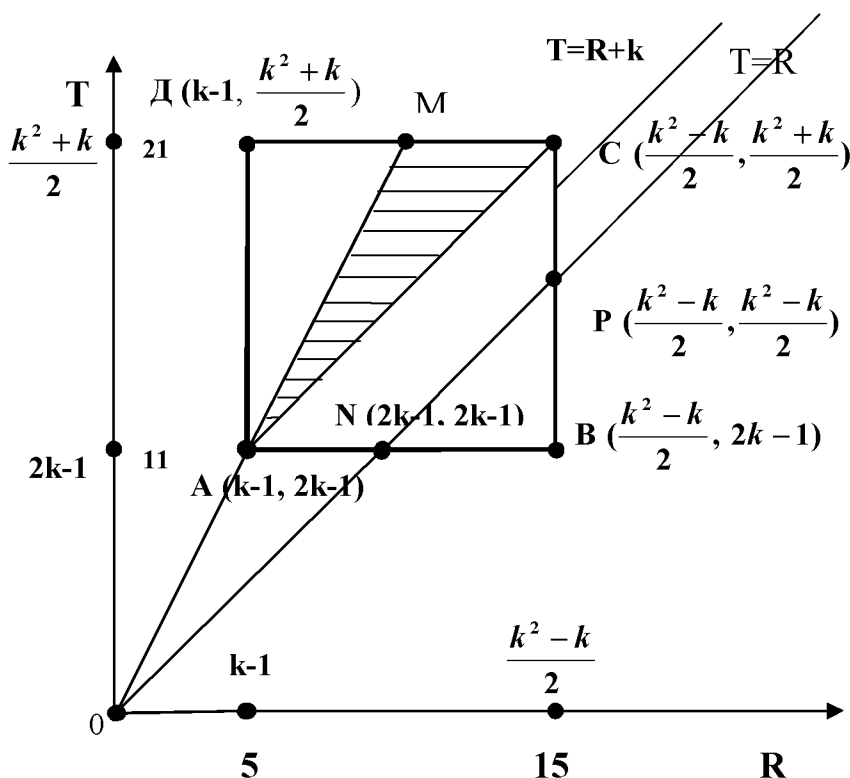
### Геометрична інтерпретація

Відомо, що  $2 \cdot k - 1 \leq T \leq \frac{k^2 + k}{2}$  (див. [2], стор. 19), а  $k - 1 \leq R \leq \frac{k^2 - k}{2}$  (див. [2], стор. 57).

В прямокутній системі координат ROT побудуємо квадрат ABCD (k), координати вершин якого є:

A ( $k - 1$ ;  $2k - 1$ ), B ( $\frac{k^2 - k}{2}$ ;  $2k - 1$ ), C ( $\frac{k^2 - k}{2}$ ;  $\frac{k^2 + k}{2}$ ), D ( $k - 1$ ;  $\frac{k^2 + k}{2}$ ). Цей квадрат зображений на мал. 1 при значенні  $k=6$ .

Для множини  $L_1 = \{0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ ,  $a_i \in N$  ( $i=1, 2, \dots, k-1$ )  $T(L_1)=k$ ,  $T(2 \cdot L_1)=T$ , а кількість різних додатніх різниць елементів множини  $L_1$  дорівнює R. Кожній множині  $\{0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$  поставимо у відповідність точку з координатами (R, T).



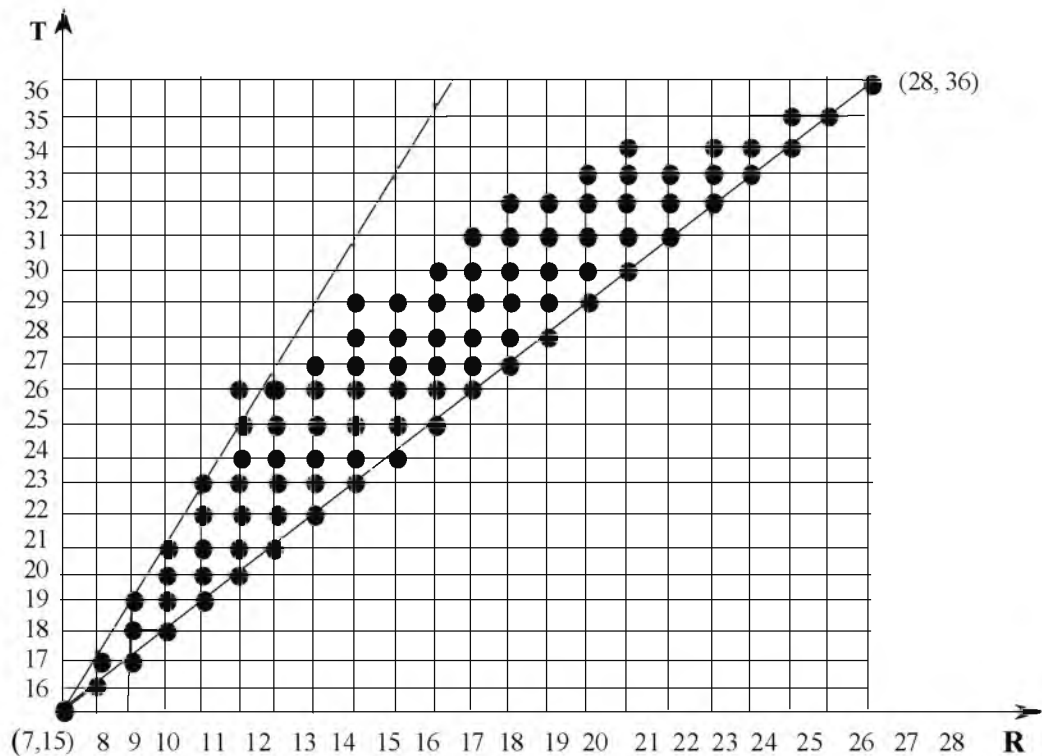
Мал. 1 (при  $k=6$ ).

Точки з координатами  $(R, T)$  не виходять за межі квадрата  $ABCD(k)$ . Рівняння діагоналі  $(AC)$  цього квадрата має вигляд  $T=R+k$ . Пряма  $T=\overline{R}=2 \cdot R+1$  проходить через вершину  $A$  і перетинає сторону  $[CD]$  квадрата в точці

$M\left(\frac{k^2+k-2}{4}; \frac{k^2+k}{2}\right)$ . Одержаний трикутник  $AMC(k)$  будемо називати критичним. Виявляється, що при  $k \leq 7$  точки з координатами  $(R, T)$  не виходять за межі відповідного критичного трикутника.

Бісектриса  $T=R$  перетинає сторони квадрата  $ABCD(k)$  ( $k \geq 5$ ) в точках  $N(2k-1, 2k-1)$  і  $P\left(\frac{k^2-k}{2}, \frac{k^2-k}{2}\right)$ . Точки, що відповідають множинам №1-№5 із наслідку 2, попадають у внутрішню область відповідної трапеції  $ANPC(k)$ . Точки ж, що відповідають множинам №6-№10, попадають у внутрішню область відповідного трикутника  $NPB(k)$ .

Для  $k=8$  квадрат  $ABCD(8)$  зображений на мал. 2.



Мал. 2

В 1973р. одержана множина  $(13, 28), \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14\}$  [4]. Це привело до оцінки:

$$\frac{\lg T}{\lg R} = \frac{\lg 59}{\lg 55} \approx 1,0175.$$

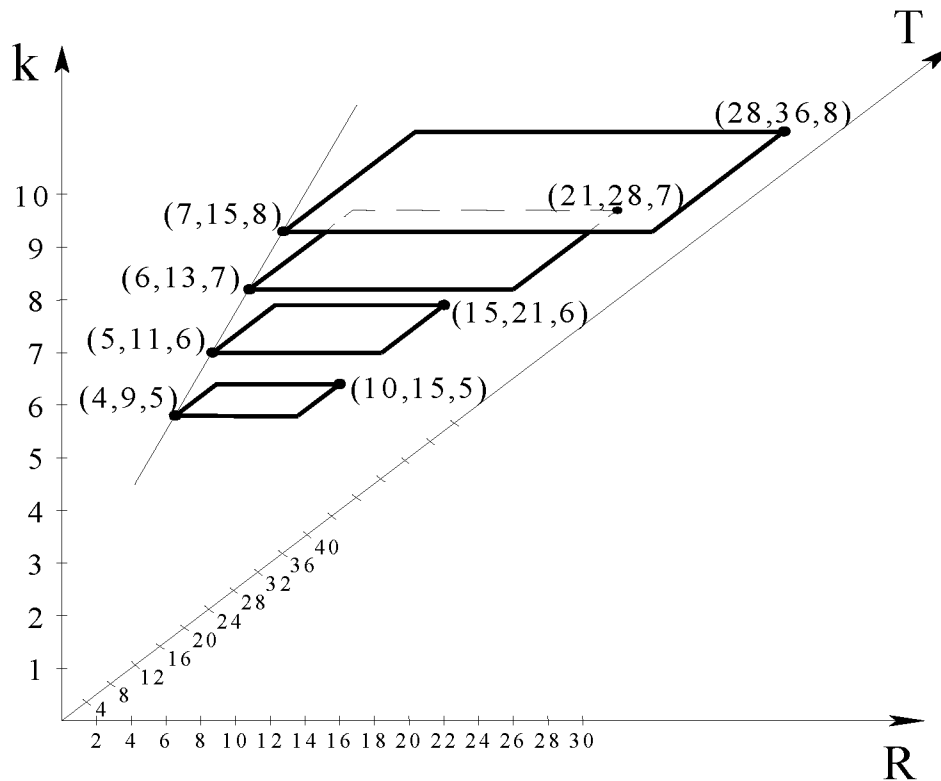
В 2004 р. Кузнецов С.Т. знайшов множини з такими значеннями  $(R, T)$ :  $(12, 26), (23, 51)$ /

Пізніше Пігарьов Ю.П. побудував множини з наступними значеннями  $(R, T)$ :  $(30, 67), (37, 83), (44, 99), (51, 119)$ .

Множина  $(51, 115), \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 17, 20, 21, 25, 28, 29, 33, 35, 37, 41, 44, 45, 49, 52, 53, 54, 56, 57\}$  приводить до оцінки:

$$\frac{\lg 115}{\lg 103} \approx 1,02378.$$

Просторова геометрична інтерпретація в системі координат  $(R, T, k)$  при  $k=5, 6, 7, 8$  наведена на мал. 3, де зображені відповідні квадрати.



Мал. 3

### БІБЛЮГРАФІЯ

1. Євладенко 1997 – Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Про залежність між інваріантами  $R$  і  $T$ . //Наукові записки. –Вип. 12. Серія: Фізико-математичні науки.-Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 1997. –с. 51-55.
2. Фрейман 1966 –Фрейман Г.А. Начала структурной теории сложения множеств. – Казань, 1966. –140 с.
3. Асафова 1973 – Асафова Г.А. Об одном типе латинских квадратов шестого порядка: Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств.– М: Союз- полиграфпром при ГК СМ СССР, 1973, – с. 189-190.
4. Пигарев 1973 – Пигарев Ю.П. и Фрейман Г.А. О зависимости между инвариантами  $R$  и  $T$ : Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств. –М: Союзполиграфпром при ГК СМ СССР, 1973, -с. 172-174.